8 дәріс. Тақырыбы: Векторлар жүйесінің сызықты тәуелділігі мен тәуелсіздігі.

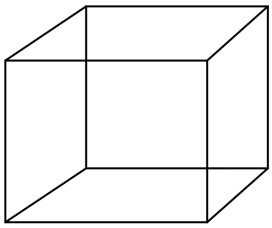
Векторлардың сызықтық тәуелділігі

T3 (Колинеар 2 векетор туралы)Егер **a** және **b** коллинеарлы және олардың біреуі 0-ден өзге (айталық **a≠0**) болса,онда **b=λa** теңдігі орындалатындай 1 ғана **λ** саны табылады.

Ан Егер **a** векторы **σ** жазықтығында кейбір түзуге параллель болса, ол **λ** жазықтығына параллель деп аталады.Егер **a** векторы **σ** жазықтығына параллель болса , ол жазықтыққа параллель кез келген жазықтыққа параллель болады.

Ан Егер **a,b,c** векторларына параллель жазықтық табылса бұл векторлар **компланар** деп

аталады.



AB,BC A_1C_1 – компланарлы векторлар
AB,AC,C_1D_1- компланарлы векторлар
AB,AD,AA_1- компланарлы емес

a,b,c компланарлы болса, оларды кеңістіктің кейбір O нүктесінен бастап салғанда **OA=a,OB=b,OC=c** векторлары шығады және O,A,B,C нүктелері 1 жазықтықта жатады.

T4 (компланар 3 вектор туралы)**a,b,c** компланар векторлар және олардың кейбір 2-уі колинеар емес болса, онда **c=λa +ßb** теңдігі орындалатындай **λ,ß** сандарының 1 ғана жұбы табылады.

Сызықтық тәуелді және тәуелсіз векторлар

Ан $a_1,a_2...a_n$ **(1)** векторлар жүйесі және $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ нақты сандары берілсін. $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\dots+\lambda_na_n=b$ **(2)** векторы берілген жүйенің векторларының сызықтық комбинациясы деп аталады.(2) теңдік орындалса(дұрыс болса), **b** векторы $a_1,a_2...a_n$ векторлары арқылы сызықтық өрнектеледі делінеді.

Ан Егер (1) жүйе үшін $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\dots+\lambda_na_n=0$ (3) теңдігі орындалатындай кемінде 1≠0 тең емес $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ нақты сандары табылса, онда (1) жүйенің векторлары **сызықтық тәуелді** деп аталады.

Ан Егер (3) теңдік тек қана $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n$ болғанда орындалса (1) вектор жүйесі **сызықтық тәуелсіз** деп аталады.

Сызықтық тәуелді және тәуелсіз векторлардың кейбір қасиеттері:

1^0 n>1 болғанда,(1) векторлар жүйесі сызықтық тәуелді болу үшін олардың 1-уі қалғандардың сызықтық комбинациясы болуы қажетті және жеткілікті.
2^0 Егер (1) векторлар жүйесінің кейбір бөлігі сызықтық тәуелді болса, онда оны өзі де сызықтық тәуелді болады.
3^0 Сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесінде **0** векторы болмайды.
4^0 Векторлар жүйесі сызықтық тәуелсіз болса, онда оның кез келген бөлігі де сызықтық тәуелсіз болады.

<u>Т5</u> (2 вектордың сызықтық тәуелді болу шарты)**a,b** векторлар жүйесі сызықтық тәуелді болу үшін олардың колинеарлы болуы қажетті және жеткілікті.(**a,b**- сызықтық тәуелді) → **(a ║ b)**

<u>Т6</u> (3 вектордың сызықтық тәуелді болу шарты) **a,b,c** векторларының жүйесі сызықтық тәуелді болу үшін, олардың компланарлы болуы қажетті және жеткілікті.

Вектордың координаттары.

1.<u>Векторлық кеңістік ұғымы.</u>

Теорема 7. Векторды компланар емес үш векторға жіктеу туралы.
Егер а,в,с компланарлы емес вектор болса,кез келген р векторы
үшін р= $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}$ (1) теңдігі орындалатындай бір ғана әдіспен α, β, γ сандары табылады.

(а,в,с-компланар емес , $\forall p$)$\Rightarrow$($\exists \alpha\beta\gamma \in \Re$ $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$)

*Салдар.*Векторлардың саны үштен артық болатын,кез келген векторлар жүйесі үшін сызықтық тәуелді болады.

*Анықтама.*Элементтері үшін төмендегі қасиеттерді қанағаттанатын қосу, санға көбейту екі операциясы енгізілген құр емес М жиыны векторлық кеңістік деп аталады(М$\neq 0$).

1. $\forall \in$М а+в в+а.
2. $\forall$ $a,b,\tilde{n}$ $\in$М $(a+b)+c = a+(b+c)$
3. $\exists$⁝$0\in$М $\forall \in$М а+0= а
4. $\forall \in$М $\exists$ $\in$М а+(-а)= 0
5. $\forall \in$М $\forall \alpha, \beta \in \Re(\beta \cdot \alpha) = (\alpha \cdot \beta) \cdot$ a
6. $\forall \in$М $\forall \alpha \in \Re$ $\alpha \cdot (a+b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$
7. $\forall \in$М $\forall \alpha, \beta \in \Re(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$
8. $\forall a \in M 1 \cdot a = a$

Бұл анықтамадағы М жиыны кез келген жиын және оның элементтері векторлар деп аталады.Еркін вектор жиынында қосу,санға көбейту операциялары үшін векторлық кеңістік қасиеті орындалатыны белгілі,олай болса еркін векторлар жиыны векторлық кеңістік құрайды.

*Анықтама.*Векторлық кеңістіктің базисі деп төмендегі екі шартты қана ғаттанатын реттелген векторлар жүйесін айтады:
1.Векторлар жүйесі сызықтық тәуелсіз
2.Осы кеңістіктің кез келген векторы осы жүйелердің векторы арқылы сызықтық өрнектеледі.

*Анықтама.*Базис құрайтын жүйелердің векторлар саны векторлық кеңіс тіктің өлшемдері деп аталады.

Реттелген компланар емес кез келген үш еркін векторлар жүйесіне геометриялық векторлар жүйесінің базисін құрайды.Шынында да $\vec{e}$,$\vec{e}$,$\vec{e}$ компланар емес векторлар болсын,онда теореама 7-нің салдары бойынша векторлық кеңістіктің кез келген векторы $\vec{e}$,$\vec{e}$,$\vec{e}$ сызықтық өрнектеледі.Теорема 6 бойынша бұл векторлар сызықтық тәуелсіз,олай болса $\vec{e}$,$\vec{e}$,$\vec{e}$ жүйесі еркін векторлар кеңістігінің базисі болады.

Сонымен қатар V-еркін векторлар кеңістігінің кез келген базисінің, векторларының саны үштен артпайтынын және кем де болмайтынын көрсету жеңіл,яғни V-кеңістігінің базисінің векторларының саны үшке тең болады.Бұдан V-векторлық кеңістігі үш өлшемді векторлық кеңістік.

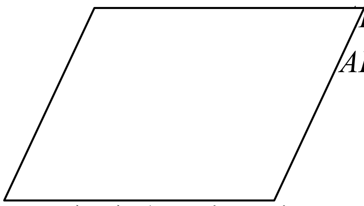
Теорема8.еорАйталық,$\vec{e}$,$\vec{e}$,$\vec{e}$ –V кеңістігінің базисі болсын осы кеңістіктің кез келген векторы бір ғана әдіспен базис векторлары арқылы жіктеледі.

$\vec{P} \in$ V,$\vec{e}$,$\vec{e}$,$\vec{e}$ –Базис

$\vec{P} =$ p$\vec{e}$+p$\vec{e}$ +p$\vec{e}$ (2) p ,p ,p $\in \Re$

Анықтама.Вектордың берілген базистегі координаттары деп оның осы базистің векторлары бойынша жіктелуіндегі,яғни (2)теңдіктегі коэфициенттерін айтады және $\vec{P}$ {P P P} түрінде беолгілейді.

Мысал:АВСД-параллеограмм



$\vec{B} = \vec{e}$

$A\vec{D} = \vec{e}$

$A\vec{C}$ -ның $\vec{e}$,$\vec{e}$ базисіндегі координаттарын табыңдар

$A\vec{C} = \vec{e} + \vec{e}$ $\quad A\vec{C}$ $\{1,1\}$

Ескерту:$\vec{e}$,$\vec{e}$,$\vec{e}$, базисінің векторларының ретін өзгертсек,басқа базис шығады.Яғни е ,е ,е және е ,е ,е -әр түрлі базистер.

2.<u>Вектордың координаттарына қатысты теоремалар</u>.

Теорама 9. $\vec{a}$ {a .a .a } $\vec{b}$ {b .b .b }векторлары $\lambda, \mu \in \Re$ сандары үшін төмендегі Теңдіктер дұрыс болады:

1.$\vec{a} + \vec{b} = \{\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}\}$

2.$\lambda \cdot \vec{a} = \{\lambda à, \lambda à, \lambda à\}$

3.$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \{\lambda à + \mu â, \lambda à + \mu â, \lambda à + \mu â\}$

*Теорама 10.(*екі вектордың коллениарлы болу шарты)

$a\{a,a,a\}в\{в,в,в\}$ векторлары коллинеарлы болу үшін сәйкес Координаттары пропорционалды болуы қажетті және жеткілікті.

$$\left(\vec{a} \prod \vec{b}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a}}{\vec{b}}\right)$$

Анықтама.Базис векторлары бірлік векторлары және қос-қостан перпендикуляр болса,мұндай базис ортонормаланған базис деп аталады.Мұндай базисті әдетте $\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$ деп белгілейді.

1.$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}|$

2.$\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}$

Теорема 11.Ортонормаланған базисте берілген $\vec{a}\{a,a,a\}$векторының ұзындығы $|\vec{a}| = \sqrt{a+a+a}$ (3) формуласымен өрнектеледі.